Title	34.相分離過程におけるLanger-Bar'on-Miller近似でのスケイリング則(パターン形成の運動及び統計,研究会報告)
Author(s)	富田, 博之
Citation	物性研究 (1986), 46(6): 920-922
Issue Date	1986-09-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/92283
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

34. 相分離過程における Langer-Bar'on-Miller 近似でのスケイリング則

京大・教養　富田博之

古い話になるが，スピノダル分解に対する Langer-Bar'on-Miller (LBM) 方程式[1]

$$\partial S_t(q)/\partial t = q^2[T-(q^2+r(t))S_t(q)] \tag{1}$$

に対し，筆者は，後期段階では秩序パラメタ s が飽和 ($=\pm 1$) しており，和則

$$\int S_t(q)\,4\pi q^2\,\mathrm{d}q = \mathrm{const.} = 1 \tag{2}$$

が成立つとして，(1) のパラメタ $r(t)$ を self-consistent に求めることにより，LBM とほぼ同じ結果を得た[2]。いずれの場合も平衡状態で $S_{eq}(q)=T/q^2$ しか得られないという欠点があるが，これは簡単に手直しできるし，スケイリング形を考えている限りでは，この部分は洗い落されるので，気にする必要はない。問題はピーク波数 $q_m(t)\sim t^{-a}$ である。数値計算の範囲では $a\sim 1/5$ が得られているが，解析してみると a は一定ではなく，最終的には $a=1/4$ であることがわかる[3,4]。得られる結論にこのような欠点があるにせよ，LBM 近似は簡潔でしかも的を射ており，捨てがたい魅力がある。

そこで，スケイリング段階ではランダムでシャープな界面が形成されているとして，LBM 近似の意味を検討しなおしてみる。(1) の $r(t)$ は相関関数の hierarchy 連鎖に対し

$$\langle s_1^3 s_2\rangle \sim \langle s_1 s_2\rangle \tag{3}$$

$$\langle s_1 s_2\rangle - \langle s_1^3 s_2\rangle = -r(t)\langle s_1 s_2\rangle \tag{4}$$

と近似して得られている。(4) の差は，$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ ともに界面上にある時に (3) (の等号) が成立たないことによると考えれば，界面の密度を $A(t)$ として

$$r(t)\sim -A(t)^2 \tag{5}$$

であることがわかる。実際，$|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|\sim\infty$ では

$$<s_1(1-s_1^2)s_2> \sim [<s(1-s^2)>/<s>]<s_1 s_2>$$

と近似できるが，［　］の部分は界面の平均曲率 H の界面全体についての平均 $\overline{H}$ を用いて

$$[\ \cdots\ ] = -2A\overline{H}/\kappa^2 <s>$$

と表される。κ は界面の厚みの逆数で，ここでは半巨視的な界面を考えていることから，$\kappa \gg A$ と仮定してある。ここで，長さを特徴づける量が A^{-1} だけであるような系では H についても

$$H/<s> \sim A$$

と考えなければならないが，例えばガウス確率場から形成されるランダムな界面では，具体的に比を計算でき，このことが示される。

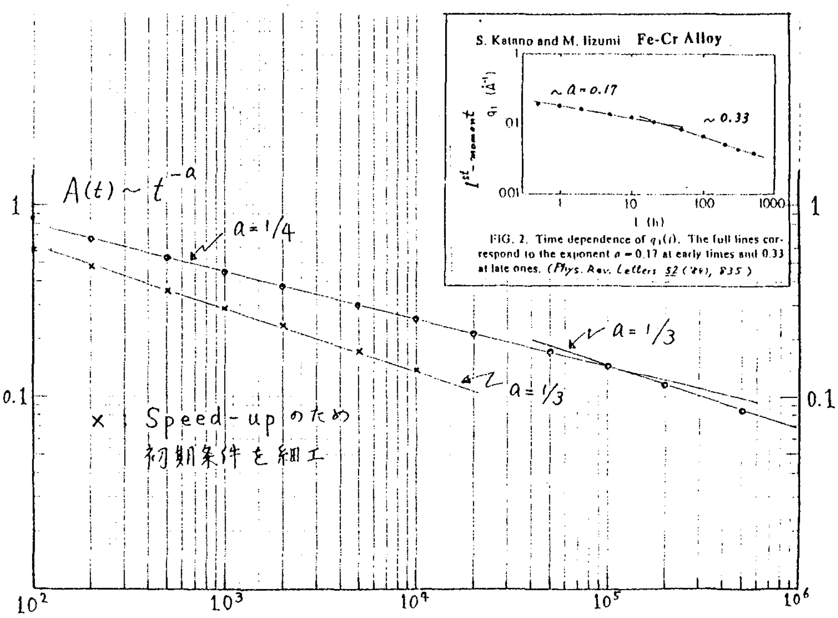
さらに重要なのは（むしろ今回の結論にとっては，このことだけでよい），$r(t)$ あるいは，$A(t)$ を決めるのに和則 (2)，すなわち，

$$\int S_t(q)\,4\pi q^2\,dq = <s^2>_t = 1 \tag{6}$$

は不適当であって，界面の面積（密度）A の時間依存性を考慮している段階では，蒸発－凝縮の起っている界面の厚み部分の寄与を考慮して

$$1 - <s^2>_t \sim A(t)/\kappa \tag{7}$$

とすべきである。これは Lifshitz-Slyozov 理論[5] で，$t^{1/3}$ 則を導くのに功妙な役割を果たして



いる時間に依存する過飽和度の導入に相当する。以上により，適当に比例定数を規格化（たとえば，κ は$=1$ とし，$t=0$ で線型理論に一致するように要請すれば決まる。）して再び簡単な self-consistent-Equation

$$\partial S_t(q)/\partial t = q^2\left[T-(q^2-A(t)^2)S_t(q)\right] \tag{8}$$

$$A(t)=1-\int S_t(q)\,4\pi q^2\,\mathrm{d}q \tag{9}$$

が得られる。スケイリング形の存在を仮定すれば，特性波数は $A(t)$ であり

$$\dot{A}(t)\sim -A(t)^4, \quad \therefore\ A(t)\sim t^{-1/3} \tag{10}$$

が得られ，界面動力学による結論[6]と一致する。図は数値計算によりこれを確かめたものである。（○印）$t\sim 10^5$ で 1/4 から 1/3 へクロスオーバが起こっていると見れないこともないが，断定するには少し計算が粗すぎる。そこで，結果的に速度を速めるような初期条件（A/κ を小さくとる）について計算しなおしたのが図の×印で，1/3 則が成り立っているとみてよいであろう。

文　献

1) J. S. Langer, M. Bar-on and H. D. Miller, Phys. Rev. **A11** (1975), 1417.
2) H. Tomita, Prog. Theor. Phys. **59** (1978), 1116.
3) 富田，基研研究会「非線型緩和過程の統計物理」（1982）
4) G. F. Mazenko and M. Zannetti, Phys. Rev. Letters, **53** (1984), 2106.
5) I. M. Lifshitz and V. V. Slyozov, J. Phys. Chem. Solids **19** (1961), 35.
6) K. Kawasaki and T. Ohta, Physica, **A118** (1983), 175.